บทที่ 1 เวกเตอร์ (Vector)

บทนำ

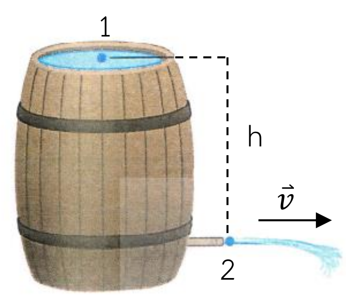
เวกเตอร์ เป็นปริมาณทางกายภาพที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง ตัวอย่างปริมาณเวกเตอร์ ได้แก่ การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง และแรง ในบทนี้จะศึกษาพีชคณิตเวกเตอร์ การรวมเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ นักศึกษาจึงจำเป็นต้องทำความเข้าใจในเรื่องดังกล่าว ไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์ เวกเตอร์เชิงกราฟ วิเคราะห์เชิงพีชคณิต และการคูณเวกเตอร์

1.1 พีชคณิตเวกเตอร์ (Vectors algebra)

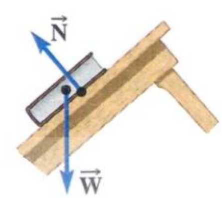
ในทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์นั้นการทราบจำนวนและหน่วยของปริมาณใดปริมาณหนึ่งจะไม่เพียงพอสำหรับอธิบายปริมาณนั้น ๆ ให้สมบูรณ์ได้ เช่น การเดินไปทางทิศเหนือ 8 กิโลเมตร ย่อมมีตำแหน่งแตกต่างจากการเดินไปทางทิศตะวันออก 6 กิโลเมตร การกล่าวเพียงสั้น ๆ ว่าได้เดินทางไป 8 กิโลเมตร จะไม่สามารถบอกตำแหน่งสุดท้ายได้ถ้าไม่ทราบทิศของการเดิน ตำแหน่งที่เปลี่ยนไปนี้เราเรียกว่า การกระจัด (Displacement) ซึ่งเรียกปริมาณที่มีทั้งขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ว่า ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) เช่น ความเร็ว ความเร่ง แรง โมเมนต์ ฯลฯ ส่วนปริมาณที่มีเฉพาะขนาดเพียงอย่างเดียวจะเรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) เช่น มวล ปริมาตร ความหนาแน่น ความดัน อุณหภูมิ อัตราเร็ว อัตราเร่ง ฯลฯ การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของปริมาณสเกลาร์ จะเหมือนกับการคำนวณทั่วไป ส่วนการคำนวณปริมาณเวกเตอร์ จะต้องคำนึงถึงทิศทางของปริมาณนั้นด้วย จึงเรียกการคำนวณแบบนี้ว่า พีชคณิตเวกเตอร์ (Vector algebra) ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดดังต่อไปนี้

1.1.1 ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) ปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว ไม่มีทิศทาง ตัวอย่าง เช่น เวลา อุณหภูมิประจุไฟฟ้า พลังงาน และปริมาตร มวล ระยะทาง อัตราเร็ว อัตราเร่ง เป็นต้น ดังนั้นปริมาณสเกลาร์จึงเป็นปริมาณต่าง ๆ ที่บอกแต่เพียงขนาดเพียงอย่างเดียวก็เป็นที่เข้าใจได้อย่างสมบูรณ์ได้

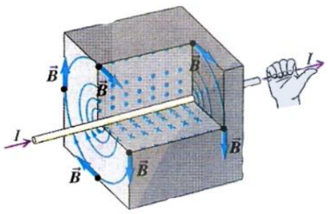
1.1.2 ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งอาจเขียนแทนด้วยลูกศร โดยความยาวลูกศรจะแสดงขนาดและหัวลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์นั้น ๆ นอกจากนี้เรายังสามารถเขียนเวกเตอร์ได้ โดยการกำหนดขนาดเวกเตอร์ด้วยตัวอักษรโรมันที่มีหัวลูกศรกำกับ
หรือเขียนเป็นตัวตัวหนา (ตัวทึบ) ก็ได้ ดังเช่นรูปที่ 1-6 (ในเอกสารนี้จะใช้สัญลักษณ์ A แทนเวกเตอร์ $\vec{A}$ หรือ B แทนเวกเตอร์ $\vec{B}$)



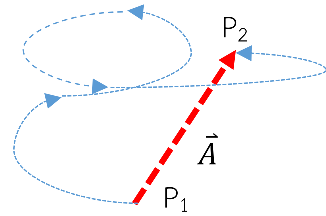
1) การไหลของของไหล



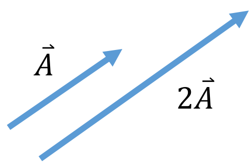
2) เวกเตอร์ของแรง



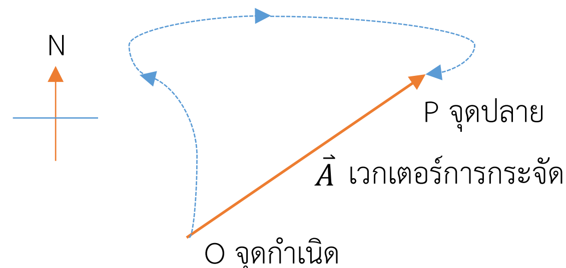
3) สนามแม่เหล็ก



4) การกระจัด



5) สัญลักษณ์ของปริมาณเวกเตอร์
ซึ่งความยาวของลูกศรแทนขนาด
และหัวลูกศรแทนทิศทางของเวกเตอร์

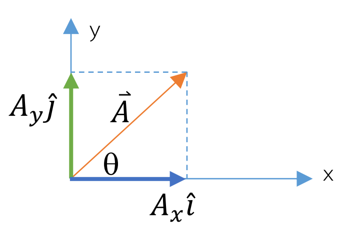


6) แสดงเวกเตอร์การกระจัด

ในรูปที่ 6 ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนการกระจัดขนาด 6 km จากจุด O ไปยังจุด P ใน ทิศตะวันออกเฉียงเหนือ จุดเริ่มต้น O คือหางลูกศร เรียกว่าจุดกำเนิดของเวกเตอร์ ส่วน P คือจุดหัวลูกศร เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ ดังนั้น เขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วย OP ได้ คือการลากเส้นจาก จุดเริ่มต้น O ไปจุดปลาย P โดยมีลูกศรกำกับไว้ที่ปลายเส้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนเป็นค่าสมบูรณ์ $A = |\vec{A}|$= 6 km หรืออักษรโรมัน ตัวปกติ A ซึ่งเป็นอักษรตัวเดียวกันนั้นเอง ในการเขียนสัญลักษณ์แทนปริมาณเวกเตอร์ด้วยลายมือ หรือพิมพ์ดีดต้องมีลูกศรกำกับไว้ด้วยเสมอ ส่วนในเอกสารนั้นจะใช้สัญลักษณ์เป็นอักษรโรมันตัวหนาแทนเวกเตอร์

1.1.3 องค์ประกอบเวกเตอร์ (Vector component)

ในระบบพิกัดฉากของระนาบ xy ถ้ากำหนดเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุม θ กับแนวแกน x ดังรูปที่ 7 องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามแนวแกน x คือ $\vec{A}_x$ และแกน y คือ $\vec{A}_y$ ซึ่งสามารถ เขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัดฉาก ได้ คือ



รูปที่ 7 แสดงองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระนาบ xy

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.1}$$

เมื่อ $\hat{\imath}$ และ $\hat{\jmath}$ คือเทอมที่กำหนดเฉพาะเพื่อบ่งบอกทิศทางซึ่งมีขนาดเท่ากับหนึ่ง และไม่มีหน่วย เรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ที่ชี้ตามแนวแกน +x และแกน +y ตามลำดับ (เอกสารนี้จะใช้สัญลักษณ์ของเวกเตอร์หน่วยของเวกเตอร์ใด ๆ เป็นพยัญชนะตัวเล็กหนา เช่น เวกเตอร์ $\vec{C}$ มีเวกเตอร์หน่วยคือ $\hat{c}$ (แต่ตำราบางเล่มอาจจะใช้เวกเตอร์หน่วยเป็น $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$, $\hat{k}$ หรือ $\hat{c}$ ก็ได้) ดังนั้น

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{A}_x}{A_x},\ \hat{\jmath} = \frac{\vec{A}_y}{A_y} \tag{1.2}$$

และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ พิจารณาจากสมการของตรีโกณมิติ มีขนาดเท่ากับ

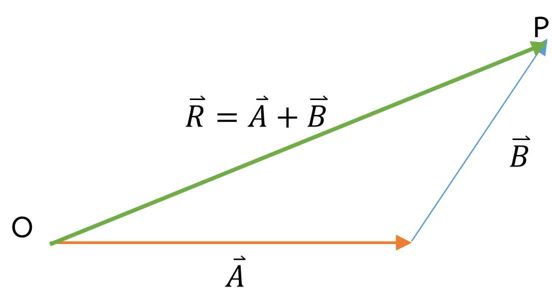
$$\vec{A}_x = A\cos\theta\ ,\ \vec{A}_y = A\sin\theta \tag{1.3}$$

ซึ่งองค์ประกอบของเวกเตอร์อาจเป็นบวกหรือลบก็ได้ อนึ่งการกำหนดแกน x และ แกน y ถ้าเขียนแกน x หรือแกน y เฉย ๆ จะหมายถึงชี้ไปทางแกนบวก

การตั้งแกนพิกัด (Coordinate) โดยทั่วไปแล้วจะตั้งให้อยู่ในแนวระดับและแนวดิ่ง แต่ในบางกรณี เช่น ในกรณีระนาบเอียง ให้ตั้งแกน x ขนานกับระนาบเอียง และแกน y ตั้งให้ตั้งฉากกับระนาบเอียง จะทำให้ง่ายต่อการคำนวณ

1.2 การรวมเวกเตอร์ (Addition of vectors)

การรวมเวกเตอร์หมายถึงการนำเวกเตอร์มาเรียงแบบ หางต่อหัว (Tail to Head) โดยเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ จะเกิดจากการลากจากหางเวกเตอร์ตัวตั้ง $\vec{A}$ ไปยังหัวเวกเตอร์ตัวสุดท้าย $\vec{B}$ ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 แสดงการรวมของสองเวกเตอร์และเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่ได้

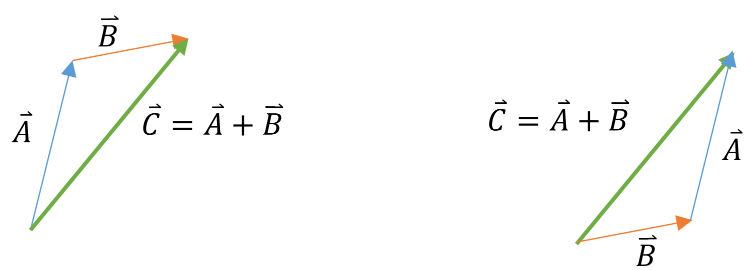
การบวกเวกเตอร์ เป็ นการรวมเวกเตอร์อย่างหนึ่งซึ่งแตกต่างจากการบวกเลขทาง คณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไป เพราะการบวกเวกเตอร์จะต้องคำนึงถึงขนาดและทิศทางของเวกเตอร์นั้นด้วย เช่น การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ แล้วได้ผลลัพธ์การบวก เป็นเวกเตอร์ $\vec{C}$ ซึ่งเราสามารถเขียนเป็น สมการได้

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (1.4)$$

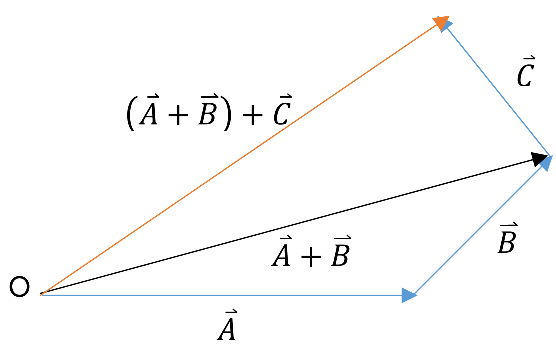
ในการบวกเวกเตอร์นั้นเราสามารถสลับที่การบวกเวกเตอร์ได้ ซึ่งเรียกว่า “คุณสมบัติ การสลับที่ (Commutative) ดังนั้น

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (1\text{-}5)$$

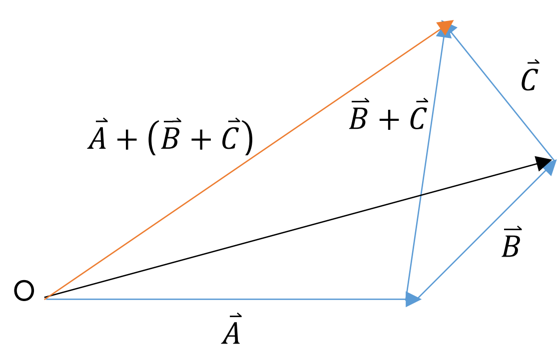
ซึ่งสามารถแสดงคุณสมบัติการสลับที่ของเวกเตอร์ได้ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 9 แสดงคุณสมบัติการสลับที่ของเวกเตอร์



รูปที่ 10 (ก) แสดงการจัดกลุ่มการบวกเวกเตอร์

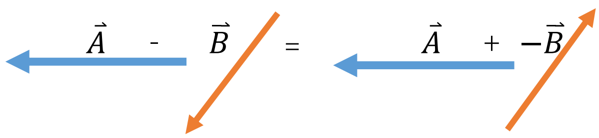


รูปที่ 10 (ข) แสดงการจัดกลุ่มการบวกเวกเตอร์

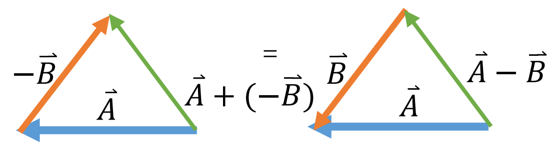
สำหรับการบวกเวกเตอร์ที่มีมากกว่า 2 เวกเตอร์ เราสามารถสลับกลุ่ม (Associative) ได้ เช่น การบวกเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ โดยการนำเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มาบวกกันก่อน แล้วจึงนำผลลัพธ์ด้วย $\vec{C}$ ดังรูปที่ 10 (ก) ส่วนรูปที่ 10 (ข) เป็นการบวกเวกเตอร์โดยนำ เวกเตอร์ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ มาบวกกันก่อน แล้วนำผลที่ได้มาบวกด้วยเวกเตอร์ $\vec{A}$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะมี ความสัมพันธ์ ดังสมการ

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \qquad (1\text{-}6)$$

ซึ่งเวกเตอร์ในสมการที่ (1-6) จะมีขนาดเท่ากันและมีทิศไปในทางเดียวกัน



=



รูปที่ 11 (ก) แสดงการลบเวกเตอร์

รูปที่ 11 (ข) แสดงการลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ก็สามารถทำได้ เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์ที่จะนำมาบวก จะเป็นส่วนกลับของเวกเตอร์ หรือมีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ลบ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังตัวอย่าง การลบเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{B}$ ดังรูปที่ 11 (ก) โดยส่วนกลับของเวกเตอร์ $\vec{B}$ และได้ผลลัพธ์ ดังรูปที่ 11 (ข) ซึ่งจะมีความสัมพันธ์ตามสมการ

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1-7}$$

1.2.1 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (The product of a scalar and vector)

การคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์นั้นแยกออกได้เป็น 3 กรณี ดังนี้ ถ้าให้ c = 4 เป็นจำนวนจริง และ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณระหว่าง c กับ $\vec{A}$ จะได้ $4\vec{A}$ ถ้า c = $-\frac{1}{2}$ ผลคูณ c กับ $\vec{A}$ จะได้ $-\frac{1}{2}\vec{A}$ (ดูรูปที่ 12 ประกอบ)

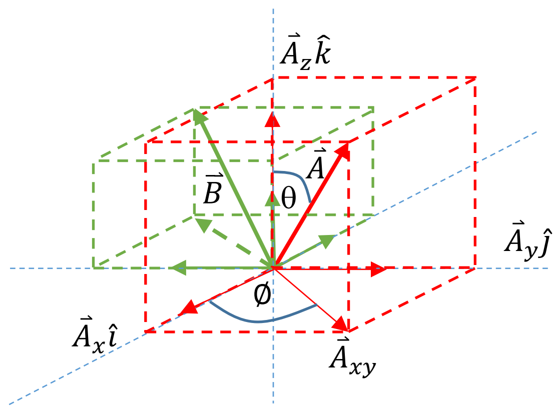
รูปที่ 12 แสดงการคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์

(1) ถ้า c > 0, c $\vec{A}$ จะมีขนาดเท่ากับ cA และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$

(2) ถ้า c < 0, c $\vec{A}$ จะมีขนาดเท่ากับ cA แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ ซึ่งการคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์จะสามารถหาผลลัพธ์ได้จากกฎการบวก ของเวกเตอร์ได้ ดังเช่น ϕ

$$3\vec{A} = \vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$$

ในการบวกและการลบเวกเตอร์ใด ๆ เราสามารถเขียนเวกเตอร์นั้น ๆ ในรูปองค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (x,y,z) ได้ ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13 แสดงองค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

โดยองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนในรูป

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_Z = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1-8}$$

เมื่อ A_x, A_y, A_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามแนวแกน x, y, z ในทิศทางตาม $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ตามลำดับ โดยที่ $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ที่กำหนดตามนิยามในสมการที่ (1-3) และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เท่ากับ

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1-9}$$

โดยมีขนาดของ A_x, A_y และ A_z ตามลำดับ คือ

$$A_x = A\sin\theta\cos\emptyset \ , \ A_y = A\sin\theta\sin\emptyset \ , \ A_z = A\cos\theta \tag{1-10}$$

สำหรับองค์ประกอบของเวกเตอร์บนระนาบ xy ใด ๆ ขนาดและทิศทางของ เวกเตอร์สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ (1-3) โดยมีขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เท่ากับ

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1-11}$$

และทิศทาง

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \tag{1-12}$$

นั้นคือ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากโดยมี $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ เราสามารถพิจารณาการบวกของเวกเตอร์ได้จาก

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

ดังนั้น

$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y + \vec{C}_z = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad (1\text{-}13)$$

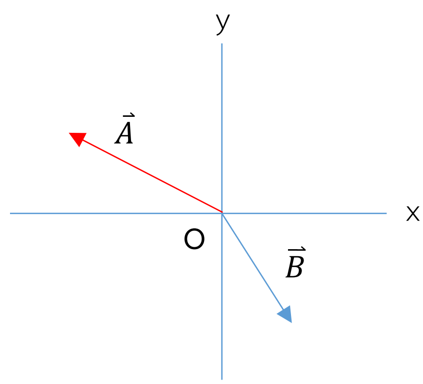
ในทำนองเดียวกันถ้าต้องการ $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ เราสามารถเปลี่ยนจากการลบเวกเตอร์ ให้เป็นการบวกเวกเตอร์ และได้ผลลัพธ์เป็น

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

และ $$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y + \vec{C}_z = (A_x - B_x)\hat{\imath} + (A_y - B_y)\hat{\jmath} + (A_z - B_z)\hat{k} \qquad (1\text{-}13)$$

ตัวอย่างที่ 1-1

จากรูปถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ xy และมีองค์ประกอบของเวกเตอร์เป็น $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ และ $\vec{B} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ จงหาขนาดและทิศทางของ $\vec{A}$ + $\vec{B}$ และ $\vec{A}$ - $\vec{B}$



จากโจทย์ $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ และ $\vec{B} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ ถ้ากำหนดให้ $\vec{C}_1 = \vec{A} + \vec{B}$ ดังนั้น

$$\vec{C}_1 = \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) + (-3\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$
$$= (2-3)\hat{\imath} + (-3+1)\hat{\jmath}$$
$$= -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$$

ขนาดของเวกเตอร์ $C_1 = |\vec{C}_1| = \sqrt{(1^2) + (-2^2)}$ = 2.24 หน่วย

ทิศทาง $\vec{C}_1$ พิจารณาจาก $\tan\theta = \frac{C_{1y}}{C_{1x}} = \frac{-2}{-1} = 2$

$$\theta = \tan^{-1}(2) = 63.4°$$

นั้นคือ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{C}_1$ เท่ากับ 1 หน่วย ในทิศทำมุม 63.4° กับแกน –x ตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

ตอบ

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $\vec{C}_2 = \vec{A} - \vec{B}$ ดังนั้น

$$\vec{C}_2 = \vec{A} - \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) - (3\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$
$$= (2+3)\hat{\imath} + (-3-1)\hat{\jmath}$$
$$= 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

ขนาดของเวกเตอร์ $C_2 = \left|\vec{C}_2\right| = \sqrt{(5^2) + (-4^2)}$ = 6.40 หน่วย

ทิศทาง $\vec{C}_2$ พิจารณาจาก $\tan\theta = \frac{C_{2y}}{C_{2x}} = \frac{5}{-4} = -0.8$

$$\theta = \tan^{-1}(-0.8) = 38.7°$$

นั้นคือ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{C}_2$ เท่ากับ 6.40 หน่วย ในทิศทำมุม 38.7° กับแกน –x ตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

ตอบ

1.2.2 การหาเวกเตอร์ลัพธ์โดยการสร้างรูป (The Geometry of Vectors Addition)

การสร้างรูปจากผลการรวมเวกเตอร์จะเป็นวิธีการที่ง่ายที่สุดในการหาเวกเตอร์ลัพธ์ เพราะใช้เพียงเครื่องมือและอุปกรณ์สำหรับการวัดเท่านั้น ก็สามารถหาคำตอบได้ ส่วนความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมักจะเกิดจากเครื่องมือวัดและผู้วัดเท่านั้น ถ้ากำหนดเวกเตอร์ $\vec{A}$ ขนาดยาว 4 หน่วย ในทิศตามแนวแกน x และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ขนาดยาว 4 หน่วย ในทิศทำมุม 45° กับแนวแกน x ดังรูปที่ 1-12 (ก) ถ้าต้องการหาเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ ที่เกิดจาก $\vec{A}$ + $\vec{B}$ เราสามารถหาโดยวิธีการสร้างรูปได้ด้วยการนำหาง $\vec{B}$ มาเรียงต่อกับหัว $\vec{A}$ แบบหางต่อหัว สำหรับเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ จะเกิดจากการลากจากหางเวกเตอร์ตัวตั้ง $\vec{A}$ ไปยัง หัวเวกเตอร์ตัวสุดท้าย $\vec{B}$ จากนั้นนำเครื่องมือวัดมาวัดความยาวของ $\vec{R}$ ได้เท่ากับ 7.39 หน่วย และ มุมที่เวกเตอร์ $\vec{R}$ ทำกับแกน +x ทวนเข็มนาฬิกา ประมาณ 22.5° ดังแสดงในรูปที่ 14

รูปที่ 14 แสดงการรวมเวกเตอร์โดยการสร้างรูป

1.2.3 การหาเวกเตอร์ลัพธ์โดยการคำนวณและแยกเวกเตอร์

การหาเวกเตอร์ลัพธ์โดยการคำนวณจากการแยกเวกเตอร์ ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่มีความสะดวกและรวดเร็ว เพราะไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องมือวัด ก็สามารถหาคำตอบได้ ถ้าพิจารณารูปที่ 14 เวกเตอร์ $\vec{A}$ ขนาด 4 หน่วย และ $\vec{B}$ มีขนาด 4 หน่วยในทิศทำมุม 45° กับแกน x เราสามารถแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ตามแนวแกน x และแกน y ได้ตามลำดับ ดังต่อไปนี้ คือ $\vec{A}_x = 4\cos 0°\hat{\imath}$, $\vec{A}_y = 4\sin 0°\hat{\jmath}$, $\vec{B}_x = 4\cos 45°\hat{\imath}$, $\vec{B}_y = 4\cos 45°\hat{\jmath}$ ตามลำดับ

รูปที่ 15 แสดงการหาเวกเตอร์ลัพธ์ โดยการแยกเวกเตอร์และคำนวณ

จากรูปที่ 15 สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ตามแนวแกน x ได้

$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x = 4\cos 0°\,\hat{\imath} + 4\cos 45°\hat{\imath}$$
$$= (4 + 2.83)\hat{\imath}$$
$$= 6.83\,\hat{\imath}$$

และเวกเตอร์ลัพธ์ตามแนวแกน y เท่ากับ

$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y = 4\sin 0°\,\hat{\jmath} + 4\sin 45°\hat{\jmath}$$
$$= (0 + 2.83)\hat{\jmath}$$
$$= 2.83\,\hat{\jmath}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ลัพธ์

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = 6.83\,\hat{\imath} + 2.83\,\hat{\jmath}$$
$$R = |\vec{R}| = \sqrt{(6.83)^2 + (2.83)^2}$$
$$= 7.39 \text{ หน่วย}$$

ละทิศทางของ $\vec{R}$ พิจารณาจาก

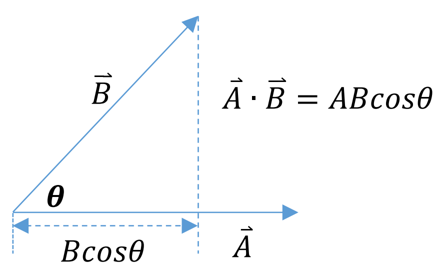
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{2.83}{6.83} = 0.414$$
$$\theta = \tan^{-1}(0.414)$$
$$\theta = 22.5^\circ + x$$

ตอบ

1.3 การคูณเวกเตอร์ (Multiplication of vectors)

ปริมาณทางเวกเตอร์นอกจากจะนำมารวมกันได้แล้ว เรายังสมารถนำมาคูณกันได้อีกแต่ยัง ไม่พบการนำเวกเตอร์มาหารกัน ซึ่งผลจากการคูณกันของเวกเตอร์จะให้ผลลัพธ์เป็น 2 ปริมาณคือ ปริมาณที่มีเฉพาะขนาดเพียงอย่างเดียว ซึ่งเรียกว่า ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product หรือ Dot product) กับปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเรียกว่า ผลคูณเวกเตอร์ (Vector product หรือ Cross product)

1.3.1 ผลคูณสเกลาร์ ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ -$\vec{B}$ มีนิยามว่าเป็นปริมาณสเกลาร์ที่ได้จาก การคูณขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ และ cosine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองนั้น ดังรูปที่ 16 ซึ่งผลคูณสเกลาร์นี้เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (อ่านว่า A dot B) ซึ่งมีค่าดังนี้



รูปที่ 16 แสดงความหมายของ dot product

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ABcos\theta \tag{1-15}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ และเป็นมุมที่เล็กกว่า 180° หรือ 0< θ < 180° อนึ่งให้สังเกตและจำไว้เสมอว่า $\vec{A}\cdot\vec{B}$ จะเป็นปริมาณสเกลาร์

จากรูปที่ 16 และนิยามของผลคูณสเกลาร์จากสมการที่ 17 จะเห็นว่า $\vec{A}\cdot\vec{B}$ คือผลคูณของขนาดของ $\vec{A}$ กับเงาของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ หรือผลคูณของขนาดของ $\vec{B}$ กับเงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ นั้นเอง ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งเขียนอยู่ในรูปขององค์ประกอบ ของเวกเตอร์ทั้งสามคือ $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$ตามแนวแกน x, y และ z ได้ตามลำดับ ซึ่งจะสามารถเขียน $\vec{A}$ ได้ดังสมการ

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1-16}$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์จากสมการที่ (1-15)

$$A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\cdot(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})$$
$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

เนื่องจากเวกเตอร์หน่วย $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$$

ดังนั้นขนาดของ $\vec{A}$ จะได้

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1\text{-}17)$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าสมการที่ (1-17) มีค่าเท่ากับสมการที่ (1-9) สมการที่ (1-16) ถ้าคูณเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วย $\hat{\imath}$ จะได้

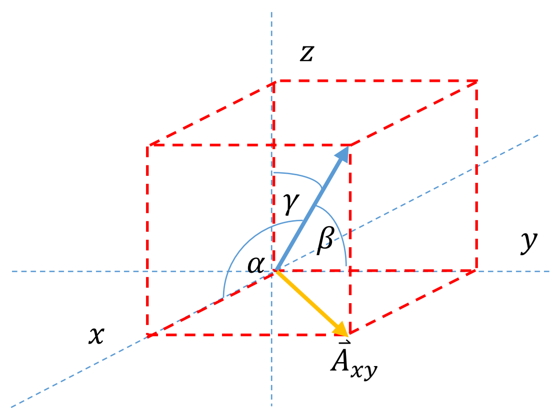
$$\vec{A}\cdot\hat{\imath} = A_x = A\cos\alpha$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าคูณด้วย $\hat{\jmath}$ และ $\hat{k}$ จะได้

$$A_y = A\cos\beta$$
$$A_z = A\cos\gamma$$

เมื่อ α, β, γ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน x, y และ z ตามลำดับ (ดูรูปที่ 17) ดังนั้นเราสามารถนิยามความหมายของไดเรคชันโคไซน์ (Direction cosine) ได้เป็น

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \qquad (1\text{-}18)$$

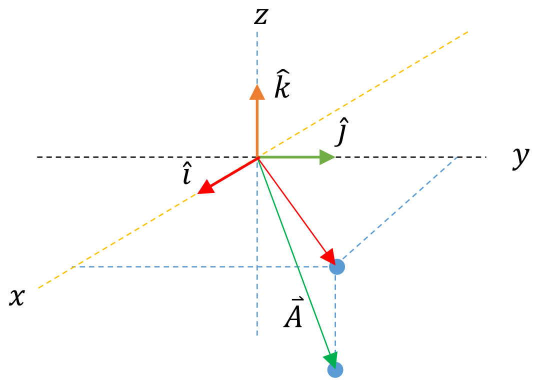


รูปที่ 17 แสดง Direction cosine ของเวกเตอร์ $\vec{A}$

กฎต่าง ๆ ของผลคูณสเกลาร์

1. $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ Commutative law
2. $\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$ Associative law
3. $c(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (c\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(c\vec{B})$
4. ถ้า $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ แสดงว่า (1) $\vec{A}$ หรือ $\vec{B}$ = 0 หรือ (2) ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่เป็ นศูนย์ แสดง ว่า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$

ตัวอย่างที่ 1-2 จากรูป กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ จงหาเวกเตอร์หน่วยของ $\vec{A}$ และมุมที่ $\vec{A}$ ทำกับแกน x,y และ z ตามลำดับ



วิธีทำ หาขนาดของ $\vec{A}$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2}$$

$$= 3.74 \quad \text{หน่วย}$$

ดังนั้นเวกเตอร์หน่วยของ $\vec{A}$ หรือ $\hat{a}$ จะมีค่าดังนี้

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}}{3.74}$$

$$= 0.53\hat{\imath} - 0.27\hat{\jmath} + 0.80\hat{k}$$ **ตอบ**

จากนิยามของไดเรกชันโคไซน์จะได้ว่า

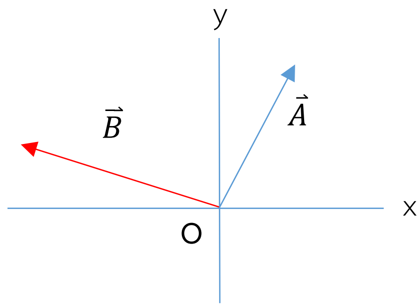
$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{2}{3.74} = 0.53$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{-1}{3.74} = -0.27$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{3}{3.74} = 0.80$$

นั่นคือมุมที่ $\vec{A}$ ทำกับแกน x,y และ z ตามลำดับ คือ $\alpha = 58.0°$, $\beta = 105.7°$, $\gamma = 36.9°$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1-3 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ และ $\vec{B} = -4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ จงหามุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$



วิธีทำ หาขนาดของ $\vec{A}$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$$

$$= 3.6 \qquad \text{หน่วย}$$

หาขนาดของ $\vec{B}$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$$

$$= 4.1 \qquad \text{หน่วย}$$

และ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \cdot (-4\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

$$= 5 \qquad \text{หน่วย}$$

จากสมการที่ 1-15 จะได้ว่า

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\theta$$

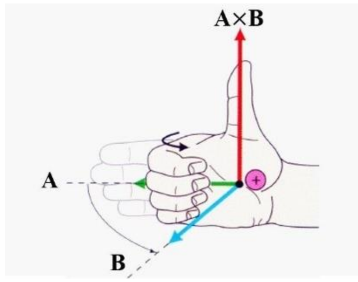
$$cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{5}{(3.6)(4.1)} = -0.34$$

$$= 109.80$$ **ตอบ**

1.3.2 ผลคูณเวกเตอร์

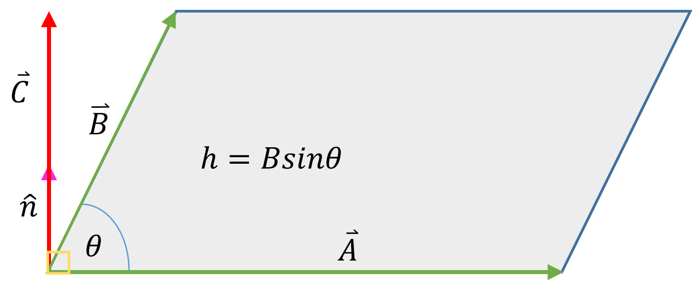
ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ใด ๆ มีนิยามเป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งมีขนาดเท่ากับผลคูณของขนาดเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ และ sine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง โดยมีทิศตั้งฉากกับระนาบที่ฟอร์มขึ้นโดยเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เขียนเป็ นสัญลักษณ์ได้ว่า $\vec{A}$ x $\vec{B}$ (อ่านว่า A cross B) และมีค่าดังนี้

$$\vec{C} = \vec{A} \, x \, \vec{B} = ABsin\theta \; \hat{n} \qquad (1\text{-}19)$$



รูปที่ 18 แสดงระบบมือขวาหรือแบบเกลียวขวา (Right-handed system)
(ที่มา: https://www.toppr.com/ask/content/story/amp/right-handed-system-of-vectors-52408/)

เมื่อ $0 < \theta < 180^{\circ}$ และทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{C}$ เขียนแสดงไว้ ดังรูปที่ 18 ตามระบบมือขวาหรือแบบเกลียวขวา (Right–handed system) ส่วนขนาดของ $\vec{A} \times \vec{B}$ จะมีค่าเท่ากับ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบด้วยเวกเตอร์ทั้งสอง ดังแสดงให้เห็นดังรูปที่ 19



รูปที่ 19 แสดงความหมายของ Cross product ที่เกิดจาก $\vec{A} \times \vec{B}$

โดยทั่วไปเวกเตอร์สามอัน $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นร่วมกันและไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุม $0 < \theta < 180^{\circ}$ และหมุนเกลียวจาก $\vec{A}$ ไป $\vec{B}$ ผ่านไปเป็ นมุม θ เกลียวจะเคลื่อนที่พุ่งไปในทิศของ $\vec{C}$ เรียกว่า เกลียวขวาสำหรับเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัดฉากใด ๆ สามารถเขียนเวกเตอร์เหล่านั้นในรูปองค์ประกอบของเวกเตอร์ตามแนวแกน x, y และ z ได้ เช่น

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} \\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_z)\hat{k} \end{aligned}$$

ทั้งนี้เพราะว่า $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ และ $\hat{k}$ ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$
$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k},\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = i,\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$
$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath},\ \hat{k} \times \hat{\jmath} = -i,\ \hat{k} \times -\hat{\imath} = -\hat{\jmath}$$

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถหาผลคูณเนื่องจากผลคูณเวกเตอร์ได้เช่นเดียวกับการคูณ โดยตรง ก็คือวิธีการทางเมทริกซ์ (Matrix) โดยใช้หลักของดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ดังแสดง ต่อไปนี้

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_z)\hat{k}$$

ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ออกมาเท่ากัน

กฎต่าง ๆ ของ Cross product

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ Anti-commutative law
2. $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) + (\vec{A} \times \vec{C})$ Distributive law
3. $c\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(c\vec{A}\right) \times \vec{B} = \vec{A} \times \left(c\vec{B}\right) = \left(c\vec{A} \times c\vec{B}\right)$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็ม
4. ถ้า $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ แสดงว่า (1) $\vec{A}$ หรือ $\vec{B}$ = 0 หรือ (2) $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน

ตัวอย่างที่ 1-4 กำหนดเวคเตอร์ $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{A} = \vec{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ และ $\vec{C} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ จงหาผลลัพธ์ของเวคเตอร์ที่เกิดจาก $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$ และ $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$

วิธีทำ พิจารณา $(\vec{B} \times \vec{C})$

จากสมการ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_z)\hat{k}$

ก็จะได้

$$\vec{B} \times \vec{C} = \left(C_yB_z - C_zB_y\right)\hat{\imath} + (C_zB_x - C_xB_z)\hat{\jmath} + (C_xB_y - C_yB_z)\hat{k}$$
$$= (-1-6)\hat{\imath} + (-4-1)\hat{\jmath} + (3-2)\hat{k}$$
$$= 7\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k}$$

ฉะนั้น $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$ ก็จะได้

$$= (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}) \cdot (7\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \hat{k})$$
$$= -21 - 10 - 1 = 32$$ หน่วย

สำหรับ $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$ จะพิจารณา $\left(\vec{B} + \vec{C}\right)$ ก่อน โดยเริ่มจากกำหนด

$$\vec{D} = \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$
$$= (1-2)\hat{\imath} + (-1+3)\hat{\jmath} + (2+1)\hat{k}$$
$$= -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

จากสมการ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_z)\hat{k}$

ก็จะได้

$$\vec{A} \times \vec{D} = \left(A_yD_z - A_zD_y\right)\hat{\imath} + (A_zD_x - A_xD_z)\hat{\jmath} + (A_xD_y - A_yD_z)\hat{k}$$
$$= (6 - (-2))\hat{\imath} + (1-9)\hat{\jmath} + (6 - (-2))\hat{k}$$
$$= 8\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 8\hat{k}$$

และมีขนาดเท่ากับ

จาก $A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

ก็จะได้ $\left|\vec{A} x \vec{D}\right| = \sqrt{(8)^2 + (-8)^2 + (8)^2}$

$= 13.86$ หน่วย **ตอบ**

เอกสารอ้างอิง

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: ส านักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ

Beiser, A. (1983). **Applied physics**. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill.

Dare, W. A. & Harold, S. S. (1983). **Physics for engineering and science**. Schaum's outline series in engineering. New York: McGraw-Hill.

Frederick, K. J. , Edward, G. W. , & Malcolm, S. J. (1993). **Physics.** New York: McGraw-Hill.

Halliday, D. , Resnick, R. , & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

_________. (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

_________. (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

Knight, R. D. (1997). **Physics.** New York: Addison Wesley Longman.

Serway, R. A. (1996). **Physics** for scientists & engineers with modern physics (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

_________. (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (1996). **University physics** (9th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.

_________. (2000). University physics (10th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.